Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

1.1. Definiciones

Un sistema de tres ecuaciones lineales de con tres incógnitas, en su forma estándar, es un conjunto de tres igualdades de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$.

Las letras x_i, a_{ij} y b_i representan, respectivamente, a las incógnitas, a los coeficientes y a los términos independientes. (Se llama lineal porque las incógnitas siempre van afectadas por el exponente 1, que no se indica. Las incógnitas x_1, x_2 y x_3 suelen designarse por las letras x, y, z, respectivamente. Los coeficientes o los términos independientes pueden ser 0).

- La solución del sistema es el conjunto de valores de x_1, x_2 y x_3 que verifican sus ecuaciones.
- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Discutir un sistema es determinar sus posibilidades de solución. Puede ser:
  – **compatible determinado**, cuando el sistema tiene una única solución.
  – **compatible indeterminado**, si tiene infinitas soluciones.
  – **incompatible**, cuando no tiene solución.

Ejemplos:

a) La terna $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$. Cumple las tres ecuaciones (Compruébese). En cambio, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ no es solución: cumple la primera y segunda ecuaciones; pero no la tercera.

b) Los sistemas $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$ son equivales, pues ambos tienen por solución los valores $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. (Puede comprobarse).

Observación: Una forma sencilla de obtener sistemas equivalentes consiste en sumar o restar las ecuaciones entre sí. Aquí, el segundo sistema se ha obtenido cambiando $E1$ por $E1 + E2$, y $E3$ por $E1 - E2$.

c) Los sistemas $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ son compatibles indeterminados. Ambos tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, las ternas (–3, 5, 0) y (0, 1, –1).

En el primero de ellos puede verse que $E3 = E1 + E2$. En el segundo, falta una ecuación.

d) El sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$ es incompatible. Puede verse que las ecuaciones segunda y tercera son contradictorias. Una misma cosa, $x - 2y + 3z$, no puede valer, a la vez, 0 y –2.

2. Métodos de resolución

- **Método de sustitución**. Es el más elemental de los métodos de resolución. Consiste en despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a las otras. Se obtiene así un sistema asociado al primero, pero con una ecuación menos. La discusión del sistema inicial coincide con la del sistema final.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad\quad -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases} \rightarrow z=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2x-1=0 \\ 3x-y-2(2x-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ -x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}.$$

- **Método de Gauss**

Consiste en transformar el sistema inicial, $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$, en otro equivalente a él, de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ \quad\quad a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=b'_2 \\ \quad\quad\quad\quad a''_{33}x_3=b''_3 \end{cases}$. (Sistema escalonado: "triangular").

El paso de un sistema a otro se consigue mediante las transformaciones de Gauss ya conocidas: sumando o restando ecuaciones hasta eliminar la incógnita x_1 de la ecuación segunda ($E2$) y las incógnitas x_1 y x_2 de la tercera ecuación ($E3$).

Estudiando la tercera ecuación resultante, $a''_{33}x_3=b''_3$, pueden determinarse las posibilidades de solución del sistema, pues:

- Si $a''_{33}\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

La incógnita x_3 puede despejarse; su valor se lleva a las otras dos ecuaciones y se obtienen los de x_2 y x_1.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3=0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

La tercera ecuación queda: $0x_3=0$, que se cumple para cualquier valor de x_3.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

La tercera ecuación quedaría: $0x_3\neq 0$, que es absurdo.

Observación: Como las ecuaciones pueden reordenarse, lo de menos es que el sistema quede triangular; lo importante es dejar una ecuación con una sola incógnita. A partir de esa ecuación se hará la discusión.

Ejemplos:

a) $$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ -2y+14z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3-2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ 28z=28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=1 \rightarrow \begin{cases} x+y-3=2 \\ -3y+7=-8 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=5,\ x=0.$$

El sistema es compatible determinado. Su solución es $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$.

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases} \to \begin{array}{l} E1 - E2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{cases} x - 5y \quad = -3 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases} \to \begin{array}{l} \\ \\ E3 + E1 \end{array} \begin{cases} x - 5y \quad = -3 \\ x + 4y + z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

El sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ x + 4y = 3 - z \end{cases} \to \begin{array}{l} \\ E2 - E1 \end{array} \begin{cases} x - 5y = -3 \\ 9y = 6 - z \end{cases} \to \begin{cases} x - 5y = -3 \\ z = 6 - 9y \end{cases}.$$

Haciendo $y = t$, se tiene: $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = \quad t \\ z = 6 - 9t \end{cases}$ $\to$ Para cada valor de t se tiene una solución.

Observación: Que un sistema sea compatible indeterminado significa que una de las ecuaciones es redundante, que depende linealmente de las otras. En definitiva, que faltan datos para concretar la solución; por eso se da en función de una de las incógnitas. En este ejemplo, las incógnitas x y z dependen del valor que se quiera dar a y.

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y \quad = 2 \end{cases} \to \begin{array}{l} \\ E2 - 2E1 \\ E3 - 3E1 \end{array} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -4y + 3z = -2 \\ -4y + 3z = -1 \end{cases} \to \begin{array}{l} \\ \\ E3 - E2 \end{array} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -4y + 3z = -2 \\ 0 = 1 \end{cases}$.

Como 0 = 1 es falso, el sistema propuesto es incompatible.

Observación: Que un sistema sea incompatible indica que sus ecuaciones son contradictorias.

- **Solución mediante la matriz inversa**

Si se definen las matrices: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, (matrices de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes), el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B.$$

Si la matriz A es invertible ($|A| \neq 0$), la solución del sistema es $X = A^{-1}B$.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x \quad - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases}$ puede escribirse matricialmente así: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa, que es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Con esto, la solución del sistema es: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$.

- **Regla de Cramer**

Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero (matriz inversible), es más cómodo aplicar la regla de Cramer (Suiza, 1704–1752), cuya forma genérica, para sistemas 3 × 3, es:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}};\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}};\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}.$$

<u>Observaciones</u>:

1) Para las tres incógnitas el denominador siempre es el mismo: $|A|$. En el numerador se sustituye la columna de los coeficientes correspondientes por la de términos independientes. (Es obvio que si el denominador vale 0, $|A|$ = 0, esta regla no puede aplicarse).

2) El lector interesado puede comprobar que la deducción de esta fórmula es relativamente sencilla. Véase:

$$X=A^{-1}B\to\left(A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ij})^t\right)\to X=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3\\ A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{32}b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3}{|A|}\\ x_2=\dfrac{A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3}{|A|}\\ x_3=\dfrac{A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3}{|A|}\end{cases}.$$

Estas expresiones de la solución son idénticas a las primeras dadas: en estas últimas se han desarrollado los determinantes de cada numerador por la primera, segunda y tercera columna, respectivamente.

Ejemplo:

Para el sistema anterior: $\begin{cases} x+2y+z=0\\ 2x\qquad -z=1\\ 3x-y-2z=3\end{cases}\Rightarrow$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-2-1}{-1}=3;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{1+3}{-1}=-4;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{1-6}{-1}=5.$$

<u>Observación</u>: En todos los casos conviene comprobar que la solución hallada es correcta. Para ello hay que sustituir en cada una de las ecuaciones iniciales.

3. Sistemas lineales en general. Teorema de Rouché (Francia, 1832–1910)

Para un sistema más grande, de *m* ecuaciones con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (*)$$

puede generalizarse cualquiera de los métodos estudiados para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. No obstante, para su discusión es más eficaz aplicar el **teorema de Rouché**, que dice: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de coeficientes (A) sea igual al rango de la matriz ampliada (M). Esto es: el sistema es compatible* ⇔ *rango de A = rango de M.*

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ambas matrices suelen escribirse juntas. Así: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = M$.

<u>Apunte para una demostración</u>:
(Para demostrar una equivalencia, pongamos [1] ⇔ [2], hay que probar que de la proposición [1] se deduce la [2]: [1] ⇒ [2]; y que de la proposición [2] se deduce la [1]: [2] ⇒ [1].
En este caso: [1] *el sistema es compatible* ⇔ *rango de A = rango de M* [2]).
Sean *C*1, *C*2, …, *Cn* y *B* los vectores columna de la matriz ampliada.

- Si el sistema (*) es compatible significa que tiene, al menos, una solución $(s_1,\ s_2, \ldots,\ s_n)$ ⇒ $s_1C1 + s_2C2 + \ldots + s_nCn = B$. Pero esto significa que el vector *B* depende linealmente de los vectores *C*1, *C*2, …, *Cn*. Por tanto: rango {*C*1, *C*2, …, *Cn*} = rango { *C*1, *C*2, …, *Cn*, *B*}.
- Recíprocamente, si rango {*C*1, *C*2, …, *Cn*} = rango {*C*1, *C*2,…, *Cn*, *B*} = *r*, entonces en la matriz *A* hay *r* vectores columna linealmente independientes. Supongamos que sean *C*1, *C*2, …, *Cr*. Como rango {*C*1, *C*2, …, *Cr*} = rango { *C*1, *C*2, …, *Cr*, *B*} ⇒ *B* depende linealmente de {*C*1, *C*2,…, *Cr*} ⇒ existen unos números $s_1, s_2, \ldots, s_r$ tales que $s_1C1 + s_2C2 + \ldots + s_rCr = B$. Luego el conjunto $(s_1,\ s_2, \ldots,\ s_r, 0, \ldots, 0)$ es una solución del sistema (*).

Discusión:

- Si rango de *A* = rango de *M* = *n* = al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado: tiene una única solución.
- Si rango de *A* = rango de *M* = *r* < *n*, el sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones, con *n* – *r* grados de libertad. Para resolverlo se prescinde de las ecuaciones sobrantes; además, hay que trasponer *n* – *r* incógnitas al lado de los términos independientes. Las soluciones se dan en función de esas incógnitas traspuestas.
- Si rango de *A* < rango de *M*, el sistema es incompatible.

Observaciones:
1) Recuérdese que el rango de una matriz es igual al número de filas (o de columnas) linealmente independientes de esa matriz.
2) Las matrices A y M tienen las mismas filas; pero M tiene una columna más que A. En consecuencia, siempre se cumple que r(A) ≤ r(M).
3) Si hay menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$), el sistema será compatible indeterminado o incompatible.
4) Si hay más ecuaciones que incógnitas ($m > n$), al menos habrá $m - n$ ecuaciones sobrantes, que serán combinación lineal de las otras.

Ejemplos:

a) Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 4x + y + z = -2 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow$ r(A) = 3.

La matriz M tiene sólo 3 filas, luego su rango no puede ser mayor que 3. Por tanto, r(M) = 3.
En consecuencia: r(A) = r(M) = 3 ⇒ el sistema es compatible determinado.
(Su solución se halla por cualquiera de los métodos estudiados. Es: $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$).

b) Sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) = M$. Como r($A$) = 2 y r($M$) = 3, el sistema es incompatible.

c) Sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas: $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = 2 \\ 2x \quad + z + t = 0 \\ \quad 2y - z - t = 4 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) = M$.

(En este caso, tanto el rango de A como el de M pueden llegar a valer 4).

Transformando las matrices iniciales se obtiene:

$$\begin{array}{c} \to \\ F2+F1 \\ F3-F1 \\ F4+F1 \end{array} \quad A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)=M\,.$$

El rango de A es 3, pues $F4 = F2 - F3$ y el menor de orden 3, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0$.

El rango de M es 4, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-4\neq 0$. (Las columnas $C3$ y $C4$ no pueden escribirse a la vez, pues son iguales).

Como r(A) < r(M), el sistema es incompatible.

d) Sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas: $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 2x-y-z=1 \\ 4x+y-9z=5 \\ x+y-4z=2 \end{cases}$.

(Como se indicó antes, si un sistema tiene 4 ecuaciones y 3 incógnitas $\Rightarrow$ sobra alguna ecuación).

Las matrices asociadas son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -9 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)=M$.

(El rango de A no puede ser mayor 3: A tiene 3 columnas; pero el rango de M puede llegar a valer 4.)

En este caso, para calcular los rangos conviene transformar la matriz (buscando ceros):

$$\to \begin{array}{c} \\ F2-2F1 \\ F3-4F1 \\ F4-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 9 & -21 & 9 \\ 0 & 3 & -7 & 3 \end{array}\right) \to A \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & 3 \end{array}\right)\equiv M\,.$$

Luego, r(A) = 2 = r(M) $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 3y-7z=3 \end{cases} \to \begin{cases} x-2y=-1-3z \\ 3y=3+7z \end{cases}$$

cuya solución dependerá del valor que se dé a la indeterminada z.

La solución es: $x=1+\dfrac{5}{3}z$, $y=1+\dfrac{7}{3}z$; o bien: $x=1+\dfrac{5}{3}\lambda$; $y=1+\dfrac{7}{3}\lambda$; $z=\lambda$.

(Para evitar denominadores se puede optar por hacer $z = 3t$. En este caso, la solución puede escribirse como: $x = 1 + 5t$, $y = 1 + 7t$, $z = 3t$).

4. Discusión de sistemas con uno o dos parámetros

Cuando alguno de los números (coeficientes o términos independientes) que figuran en un sistema no está determinado, se sustituye por una letra llamada parámetro. En estos casos hay que discutir para qué valor o valores del parámetro el sistema tiene solución o no. La discusión se realiza estudiando y comparando los rangos de las matrices de coeficientes, *A*, y ampliada, *M*. (Teorema de Rouché).

Ejemplos:

a) Clasificación y resolución en función del parámetro $\lambda \in \mathbf{R}$, del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}.$$

→ Las matrices *A* y *M*, de coeficientes y ampliada, son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right) = M$.

El determinante de *A* es:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 6\lambda - 5\lambda + 9 - 1 = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = (\lambda - 1)(3\lambda - 8).$$

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 8/3 → soluciones de $3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0$.

Con esto:

- Si $\lambda \neq 1$ y 8/3 ⇒ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado. Su solución, si se pide, debe darse en función del parámetro.

Por Cramer se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{6\lambda - 12 + 6}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{6(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{6}{3\lambda - 8};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{-3\lambda - 2(5\lambda - 9) - 5}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{-13(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{-13}{3\lambda - 8};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{3\lambda - 5 + 2}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{3(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(3\lambda - 8)} = \frac{3}{3\lambda - 8}.$$

- Si λ = 1, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$.

El rango de *A* es 2. (Basta con observar que hay un menor de orden 2 distinto de 0).

Para ver el rango de M se calcula: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, el rango de M también vale 2.

<u>Observación</u>: No es necesario calcular más menores de M, pues si el rango de A vale 2 las columnas son dependientes y puede quitarse una de ellas, por ejemplo, $C1$; queda así un único menor de M: M_1. (Si dos de las columnas fuesen proporcionales, habría que prescindir, necesariamente, de una de ellas para calcular al rango de M).

En definitiva, si λ = 1, el sistema es compatible indeterminado.

Sustituyendo ese valor (λ = 1) en el sistema inicial, queda: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$.

(Como r(A) = r(M) = 2, sobra cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera, $E3$. Aunque no hace falta comprobar nada más, puede verse que $2E3-E2=E1$, luego podría suprimirse cualquiera de las ecuaciones).

Así pues, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ 5x+3y=-3z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3E1-E2 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} -2x=6+6z \\ 5x+3y=-3z \end{cases} \to \begin{matrix} x=-3-3z \\ y=5+4z \end{matrix} \to \text{Haciendo } z=t\text{: } \begin{cases} x=-3-3t \\ y=5+4t \\ z=t \end{cases}.$$

- Si λ = 8/3, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2.

Para ver el rango de M se calcula: $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 8/3 & 1 \end{vmatrix} = 10$. Por tanto, el rango de M vale 3.

Luego, si λ = 8/3 el sistema es incompatible.

<u>Comentario</u>: La discusión del sistema también podría hacerse a partir de la solución hallada por Cramer:

$$x = \frac{6(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{6}{3\lambda-8};\ y = \frac{-13(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{-13}{3\lambda-8};\ z = \frac{3(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{3}{3\lambda-8}.$$

Como el denominador, que es $|A| = (\lambda-1)(3\lambda-8)$, se anula cuando λ = 1 o λ = 8/3, se concluye:

- Si $\lambda \neq 1$ y 8/3, los valores de x, y, z pueden hallarse y son únicos en cada caso → SCD.
- Si λ = 8/3, las soluciones no están definidas (valen ∞): el sistema será incompatible.

Si λ = 1, aunque tampoco están definidas (valen 0/0), al poder simplificar las tres incógnitas por el factor λ – 1, se advierte que para λ = 1 se puede seguir trabajando. En efecto, sustituyendo en las ecuaciones λ por el valor 1 se descubre que las ecuaciones son linealmente dependientes, y el sistema compatible indeterminado. Así se ha visto arriba.

Ejemplo b): Discute según los valores del parámetro *m* el sistema: $\begin{cases} mx - y + 3z = m \\ 2x + 4z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$.

$\rightarrow$ Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) = M \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4m - 6$.

Por tanto:

- si $m \neq \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ rango(A) = 3 $\Rightarrow$ El sistema será compatible determinado.
- si $m = \frac{3}{2} \Rightarrow |A| = 0$ y el rango de *A* vale 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

En este caso, la matriz *M* queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -1 & 3 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) = M$.

Como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 3 \neq 0$, se deduce que el rango de *M* es 3.

En consecuencia, si $m = \frac{3}{2}$, el sistema es incompatible, pues r(A) < r(M).

Ejemplo c): Discute según los valores del parámetro *a* el sistema: $\begin{cases} (a-3)y + 4z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$.

$\rightarrow$ Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = a(-2a + 6 - 4) = a(2 - 2a) \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } a = 0 \text{ o } a = 1.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = M \rightarrow$

r(A) = 2.

Como $|M_1| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 4 \neq 0 \rightarrow$

r(M) = 3.

Luego, si *a* = 0, el sistema es incompatible.

- Si $a = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) = M \rightarrow$

r(A) = 2.

Como $|M_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ r(M) = 2.

Luego, si *a* = 1, el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo d): Estudio de un sistema con dos parámetros

Discusión, en función de los valores de a y b, del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y-4z=3 \\ ax+3y-az=0 \\ x+3ay-10z=b \end{cases}$$

→ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ a & 3 & -a & 0 \\ 1 & 3a & -10 & b \end{array}\right)=M \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ a & 3 & -a \\ 1 & 3a & -10 \end{vmatrix}=-9(a+1)(a+2), \text{ luego:}$$

- Si $a \neq -1$ y $-2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M), independientemente del valor de b. El sistema será compatible determinado.

La solución, que se puede hallar aplicando la regla de Cramer, quedará en función de a y b.

- Si $a=-1$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 & b \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3 \neq 0$.

Rango de M: El menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & b \end{vmatrix}=27-3b$, que valdrá 0 cuando b = 9.

Por tanto:

- si a = –1 y $b \neq 9$, el sistema será incompatible: r(A) = 2 y r(M) = 3.
- si a = –1 y b = 9, el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

- Si $a=-2$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & -10 & b \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-3 \neq 0$.

Rango de M: El menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -10 & b \end{vmatrix}=54-6b$, que valdrá 0 cuando b = 9.

Por tanto:

- si a = –2 y $b \neq 9$, el sistema será incompatible: r(A) = 2 y r(M) = 3.
- si a = –2 y b = 9, el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

Resumiendo:

- Si $a \neq -1$ y $-2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M), independientemente del valor de b.
- Si a = –1 o a = –2 y $b \neq 9$ el sistema será incompatible: r(A) = 2 y r(M) = 3.
- Si a = –1 o –2 y b = 9 el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

5. Sistemas homogéneos

5.1. Definiciones

Un sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo cuando el término independiente de cada una de las ecuaciones es 0. Por tanto, son de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

- Estos sistemas siempre son compatibles, pues los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ son una solución del sistema; esa es la llamada **solución trivial**. También es evidente que la matriz M es la ampliación de A con una columna de ceros, lo cual no afecta al rango; luego r(A) = r(M).
- Si r(A) = n = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Su única solución es la trivial.
- Si r(A) < n, el sistema será compatible indeterminado. El sistema homogéneo tendrá infinitas soluciones. En el caso de que tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas deberá cumplirse que $|A| = 0$.

Ejemplos:

a) El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -3x + y \quad = 0 \end{cases}$ sólo tiene la solución trivial, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, pues el determinante de la matriz de coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

b) El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado, pues el determinante de la matriz de coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r(A) = 2 < el número de incógnitas.

El sistema es equivalente a $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z \\ x + y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$.

Algunas soluciones de este sistema son: (0, 0, 0), (3, –5, 1), (–3, 5, –1)...; naturalmente siempre está la solución (0, 0, 0).

c) El sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado.

Compatible porque es homogéneo; indeterminado porque tiene menos ecuaciones que incógnitas. (Su solución es: $x = t$, $y = t$, $z = 0$).

5.2. Discusión de un sistema homogéneo con un parámetro
Como se ha dicho anteriormente, los sistemas homogéneos siempre tienen solución. Por tanto, la discusión de estos sistemas consiste en determinar cuando tienen sólo la solución trivial y cuando tienen infinitas soluciones.

Ejemplos:

a) Discusión, según los valores del parámetro a, del sistema: $\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+z=0 \\ ax+z=0 \end{cases}$.

→ Resulta obvio que el sistema es homogéneo. La matriz de coeficientes,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=3(1-2a)=0 \text{ si } a=1/2.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 1/2$, r(A) = 3, sistema compatible determinado. La única solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
- Si $a = 1/2$, r(A) = 2. El sistema es compatible indeterminado, equivalente a

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ z=-3y \end{cases}, \text{ cuya solución puede darse como: } \begin{cases} x=6t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}.$$

b) Discusión y resolución, dependiendo de los valores de λ, del sistema $\begin{cases} (2-\lambda)x+y \quad =0 \\ (-1-\lambda)y+z=0 \\ 4y+(2-\lambda)z=0 \end{cases}$.

→ El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \Rightarrow \text{Se anula si } \lambda=-2,\ \lambda=2 \text{ o } \lambda=3.$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq -2$, 2 y 3, el rango de A es 3 y el sistema compatible determinado. Su solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- Si $\lambda = -2$, el sistema queda $\begin{cases} 4x+y=0 \\ y+z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-4t \\ z=4t \end{cases}$.
- Si $\lambda = 2$, el sistema queda $\begin{cases} y=0 \\ -3y+z=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

(Como nada se dice de x, esta queda indeterminada).

- Si $\lambda = 3$, el sistema queda $\begin{cases} -x+y=0 \\ -4y+z=0 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$ La solución del sistema es $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$.

6. Problemas de sistemas

Como en cualquier problema, en los que dan lugar a un sistema de ecuaciones, el proceso a seguir puede ser:
1) Leerlo despacio y entenderlo.
2) Definir las incógnitas.
3) Descubrir los datos y las relaciones algebraicas entre las incógnitas y los datos: escribir las ecuaciones.
4) Expresar esas ecuaciones en la forma estándar y discutir y resolver el sistema obtenido.

A continuación se proponen tres problemas aparentemente fáciles (y así son). Se sugiere al lector interesado que los procure resolver por su cuenta, que no se contente con estudiarlos y entenderlos, pues eso resulta demasiado fácil.

Problema 1. Helados. (Propuesto en Selectividad en 2011, Cantabria)
Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros y sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas.
a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita averiguar cuántos helados de cada tipo se han vendido.
b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución. ¿Es posible que se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas?
c) Para $k = 3$, calcula cuántos helados de cada tipo se han vendido.
Solución:
a) Sean x, y, z el número de helados vendidos de una, dos y tres bolas, respectivamente. De acuerdo con los datos del problema debe cumplirse:

$$\begin{cases} x+y+z=157 & \textit{cantidad} \\ x+2y+3z=278 \to & \textit{ingresos} \\ x=kz & \textit{relación} \end{cases}$$

Por tanto, queda: $\begin{cases} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x-kz=0 \end{cases}$.

b) Para que el sistema tenga solución es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada, r(A) = r(M), siendo:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{array}\right)=M$$ $\to$ El determinante de A vale: $|A|=-2k-k+3-2=-k+1$.

Con esto:
- Si $k\neq 1$, el determinante es distinto de 0 y el rango de A será 3. En este caso, el sistema tendrá solución única; dependiendo en cada caso del valor de k.
- Si $k = 1$, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=M$.

En este caso, el rango de A es 2; pero el de M es 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 157 \\ 2 & 3 & 278 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$.

Luego, el sistema no tendrá solución.
Por tanto, no pueden venderse el mismo número de helados de una y de tres bolas.

c) Para k = 3, el sistema es compatible determinado. Puede resolverse por Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1-E3 \\ E2-E3 \\ \end{matrix} \begin{cases} y+4z=157 \\ 2y+6z=278 \\ x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ \end{matrix} \begin{cases} y+4z=157 \\ -2z=-36 \\ x-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=54 \\ y=85 \\ z=18 \end{cases}.$$

Observación:
La solución dada más arriba es correcta y no cabe exigir más en un examen de Selectividad. No obstante, la naturaleza del problema exige que las soluciones sean enteras y positivas: los helados se venden por unidades, por bolas enteras. Esto debería poner en guardia al lector interesado. ¿El sistema tendría solución coherente si k = 0,6, por ejemplo? En concreto, si se resuelve el sistema para k = 0, que teóricamente es compatible, da una solución negativa para z, lo que es absurdo. Una forma de superar esta dificultad sería hallar la solución del sistema en función de k y discutirla exigiendo que todas las soluciones sean números naturales.

Se obtiene: $x=\dfrac{36k}{k-1}$; $y=\dfrac{193-121k}{k-1}$; $z=\dfrac{36}{k-1}$.

Para que $z=\dfrac{36}{k-1}$ sea un número natural k sólo puede tomar los valores 2, 3, 4, 5, 7, 10, 13, 19 y 37. (¿Valdrán todos?).

Problema 2. Edades
Halla las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 9 años la edad de la madre era 4 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 18 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.
Solución:
En la siguiente tabla se resumen los datos y las relaciones existentes:

Edades	Madre	Hijo 1º	Hijo 2º	Relación de edades
Actualmente	x	y	z	
Hace 9 años	$x-9$	$y-9$	$z-9$	$x-9=4(y-9+z-9)$
Dentro de 18 años	$x+18$	$y+18$	$z+18$	$x+18=y+18+z+18$
Dentro de $x-y$ (*)		x	$z+x-y$	$z+x-y=42$

(*) Puede observarse que el hijo mayor, que tiene y años, tendrá la edad de la madre (x años) dentro de $x-y$ años.
Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-4y-4z=-63 \\ x-y-z=18 \\ x-y+z=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} -3y-3z=-81 \\ x-y-z=18 \\ 2z=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1:(-3) \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} y+z=27 \to y=15 \\ x-y-z=18 \\ z=12 \end{cases}$$

Luego: z = 12; y = 15; x = 45.
La madre tiene 45 años; los hijos, 15 el mayor y 12 el menor.

Problema 3. Mezclas. (Propuesto en Selectividad en 1998, Canarias)
Se mezclan tres clases de vino de la siguiente manera:
a) 5 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 pesetas/litro.
b) 1 litros de Tenerife, 3 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 pesetas/litro.
c) 3 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 pesetas/litro.
Halla el precio por litro de cada clase de vino.
(Nota: Se mantiene la peseta por ser la moneda vigente cuando se propuso el problema).
Solución:
Sean *x*, *y*, *z* el precio del litro de vino de Tenerife, La Palma y Lanzarote, respectivamente.
Con los datos dados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 5x+6y+3z=120\cdot 14 \\ x+3y+6z=111\cdot 10 \\ 3x+6y+6z=116\cdot 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6y+3z=1680 \\ x+3y+6z=1110 \\ 3x+6y+6z=1740 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 5x+6y+3z=1680 \\ -9x-9y=-2250 \\ -7x-6y=-1620 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 9E3-7E2 \end{matrix} \begin{cases} 5x+6y+3z=1680 \\ -9x-9y=-2250 \\ 9y=1170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \to z=100 \\ \to x=120 \\ y=130 \end{cases}.$$

Los precios de los vinos son: Tenerife, 120 pta/l; La Palma, 130 pta/l; Lanzarote, 100 pta/l.

Observación: Un altísimo porcentaje de estudiantes escribe mal las ecuaciones. Se "olvida" de multiplicar por el número total de litros: por 14, por 10 y por 15, respectivamente.

Problema 4. Números. (Propuesto en Selectividad en 2000, Andalucía)
Dado un número de tres cifras *ABC*, se sabe que la suma de sus cifras es 16. Por otra parte, si permutamos las centenas con las unidades, obtenemos el número inicial incrementado en 198. Si en el número inicial permutamos decenas con unidades, obtenemos el inicial disminuido en 27. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número.
Solución:
El número $ABC = A$ centenas + B decenas + C unidades = $100A + 10B + C$.
Se sabe que la suma de sus cifras es 16: $A + B + C = 16$
Si se permutan las centenas con las unidades: $ABC \to CBA$: el número se incrementa el 198.
Se cumple: $CBA = ABC + 198$.
Luego,

$$100C + 10B + A = 100A + 10B + C + 198 \Rightarrow 99C - 99A = 198 \Leftrightarrow C - A = 2.$$

Si se permutan las decenas con las unidades: $ABC \to ACB$: el número disminuye en 27.
Se cumple: $ACB = ABC - 27$.
Por tanto,

$$100A + 10C + B = 100A + 10B + C - 27 \Rightarrow 9C - 9B = -27 \Leftrightarrow C - B = -3.$$

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=16 \\ 99C-99A=198 \\ 9C-9B=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ C-A=2 \\ C-B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ A=C-2 \\ B=C+3 \end{cases}.$$

Sustituyendo los valores de *A* y *B* en la primera ecuación se tiene:

$$C-2+C+3+C=16 \Rightarrow 3C=15 \Rightarrow C=5;\ A=3;\ B=8.$$

El número dado es el 385.

7. Ejercicios finales

Se proponen a continuación una serie de problemas diversos para que el estudiante pueda practicar y comprobar su nivel de conocimientos. Como siempre, se advierte que no se trata de estudiar los problemas: deben hacerse personalmente.

Ejercicio 1

Discute, en función de los valores del parámetro *m*, el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{cases}.$$

Solución:

Las matrices *A* y *M*, son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{array}\right)=M \Leftrightarrow A=\begin{array}{c} \\ \\ F3-F2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ 0 & m-m^2 & 0 & 0 \end{array}\right)=M .$$

(Aunque no es necesario, es preferible hacer ceros para simplificar los cálculos; advirtiendo que, al tratarse de sistemas, donde cada fila corresponde a una ecuación, los ceros deben hacerse por filas, y no por columnas).

El determinante de *A*, desarrollado por la tercera fila, es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ 0 & m-m^2 & 0 \end{vmatrix} = \left(m^2-m\right)\left(m^2-m\right).$$

Este determinante vale 0 si $m = 0$ o $m = 1$, soluciones de la ecuación $\left(m^2-m\right)\left(m^2-m\right)=0$.

Luego:

- Si $m \neq 0$ y $1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*), con lo que el sistema será compatible determinado.
- Si $m = 0$, sustituyendo en las matrices anteriores, se tiene:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=M \Rightarrow$$ r(*A*) = 1 y r(*M*) = 2. El sistema es incompatible.

(Obsérvese que la matriz *A* tiene dos filas nulas, mientras que *M* sólo tiene una fila nula).

- Si $m = 1 \to A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=M \Rightarrow$ r(*A*) = 1 y r(*M*) = 1. El sistema es compatible indeterminado, con 2 grados de indeterminación.

En este caso, $m = 1$, el sistema queda $\{x+y+z=1$, cuya solución es $\begin{cases} x=1-p-q \\ y=\quad p \\ z=\qquad q \end{cases}$.

Observación: Es evidente que el "sistema" $\{x+y+z=1$ es una simple ecuación que tiene una infinidad de soluciones. El valor de cada incógnita dependerá de los que se quieran dar a las otras. En la dada arriba se ha optado por pasar de $x+y+z=1$ a $x=1-y-z$; y parametrizar *y* con la letra *p* y *z*, con la letra *q*: $y=p$; $z=q$. Así, si, por ejemplo, se hace $p = -3$ y $q = 5$, el valor correspondiente de *x* será $x = -1$.

Ejercicio 2. (Propuesto en Selectividad en 2012, Aragón)

Sea a un número real y el sistema lineal $\left\{\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right.$.

a) Calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y determina para qué valores de a el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema anterior en el caso a = 0**.**

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a+2 = (a-1)(a^2+a-2)=(a-1)(a-1)(a+2)$.

La descomposición factorial se hace aplicando el teorema del resto: viendo que una raíz es a = 1, dividiendo (por Ruffini) y resolviendo la ecuación de segundo grado.

Para estudiar la compatibilidad del sistema hay que estudiar los rangos de las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right)=M$$

Como se ha visto, $|A|=(a-1)(a-1)(a+2) \Rightarrow |A|=0$ si a = 1 (raíz doble) o a = –2.

Luego:

- Si $a \neq 1$ y $-2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si a = 1 se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M \Rightarrow$ r(A) = r(M) = 1.

El sistema será compatible indeterminado con dos grados de libertad.
El sistema inicial quedará reducido a $\{x+y+z=1$.

- Si $a = -2$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2; pero el rango de M es 3, pues el menor de M,

$$|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0+10-5\neq 0.$$

En este caso el sistema es incompatible.

b) Para a = 0, el sistema es:

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x\quad +z=0 \\ x+y\quad =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{(Por Gauss)} \begin{array}{l} \\ \\ E3-E1 \end{array}\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x\quad +z=0 \\ x\quad -z=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ E3+E2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x\quad +z=0 \\ 2x=-1 \end{array}\right..$$

La solución es: x = –1/2; y = 1/2; z = 1/2.

Ejercicio 3. (Propuesto en Selectividad en 2011, Murcia)
Discute, en función de los parámetros *a* y *b*, el siguiente sistema de ecuaciones. No hay que resolverlo.

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+2z=3 \\ x-3y-z=-1 \\ -x+8y+4z=b \end{array}\right\}$$

Solución:
La solución dependerá del rango de las matrices *A* y *M*:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{array}\right)=M$$

El determinante de *A* vale:

$$|A|=-4-3a+10=6-3a \Rightarrow |A|=0 \text{ si } a=2.$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*) $\to$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 2$, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{array}\right)=M$. El rango de *A* es 2.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix}=-3b+8-2(b-1)+15=-5b+25$. Este menor se anula si $b = 5$.

Por tanto:
- Si $a = 2$ y $b = 5 \Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

Observa que las matrices asociadas son en este caso $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & 5 \end{array}\right)=M$. La fila 3ª puede suprimirse pues es combinación lineal de las dos primeras: $F3=F1-2\cdot F2$.
- Si $a = 2$ y $b \neq 5 \Rightarrow$ r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3. El sistema será incompatible.

Ejercicio 4. (Propuesto en Selectividad en 2011, Madrid)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de *A* en función de los valores de *a*.

b) En el caso $a = 2$, discute el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de *b*, y resuélvelo cuando sea posible.

c) En el caso $a = 1$, resuelve el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución:
a) El determinante de la matriz vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a\left(a^2+1\right)+2(-a+2)+a^2(-1-2a) = -a^2+4 .$$

El determinante de A vale 0 si $a = -2$ o $a = 2$. Por tanto:

- Si $a \neq \pm 2$ el rango de A es 3: r(A) = 3; y si $a = -2$ o $a = 2$, r(A) < 3.
- Para $a = -2$, $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Como el menor $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 2.
- Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Su rango también es 2, pues $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

b) En el caso $a = 2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2; y el sistema dado

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y+4z=2 \\ -x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=b \end{cases}.$$

Como se ha visto, para $a = 2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2.
Calculo del rango de la matriz ampliada:

El menor: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = 6b-18$.

Por tanto:

- Si $b = 3$, su valor es 0 y tendrá rango 2. El sistema será compatible indeterminado.
- Si $b \neq 3$, tendrá rango 3. El sistema será incompatible.

c) En el caso $a = 1$ el sistema es compatible determinado.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 2x-2y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} E1+2E2 \\ \\ E3+2E2 \end{array}\begin{cases} -z=3 \\ -x+y-z=2 \\ 3y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-3 \\ x=y-z-2 \\ 3y=z+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}.$$

Ejercicio 5

Sea el sistema homogéneo $\begin{cases} (3-\lambda)x-y = 0 \\ -x+(2-\lambda)y-z=0 \\ -y+(3-\lambda)z=0 \end{cases}$. Resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado.

Solución:
Como es un sistema homogéneo siempre será compatible. Para ver si determinado o indeterminado se hace el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-1]-(3-\lambda) = \rightarrow \text{(factor común)}$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-2]=(3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

Por tanto, $|A|=0$ si $\lambda = 3$, $\lambda = 1$ o $\lambda = 4$. Para esos valores de λ el sistema será compatible indeterminado. (En los demás casos, la única solución será la trivial).

- Si $\lambda = 3$, el sistema queda: $\begin{cases} -y=0\\ -x-y-z=0\\ -y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t\\ y=0\\ z=t\end{cases}$.
- Si $\lambda = 1$, se tiene $\begin{cases} 2x-y=0\\ -x+y-z=0\\ -y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t\\ y=2t\\ z=t\end{cases}$.
- Si $\lambda = 4$, queda $\begin{cases} -x-y=0\\ -x-2y-z=0\\ -y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t\\ y=t\\ z=-t\end{cases}$.

Ejercicio 6. (Propuesto en Selectividad en 2011, Castilla-León)
Discute según los valores de m y resuelve cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx+y=2\\ x+my=m\\ x+y=2\end{cases}$.

Solución:
Es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Para que tenga solución es necesario que el rango de la matriz ampliada sea menor que 3.
Por tanto,

$$\begin{vmatrix}m & 1 & 2\\ 1 & m & m\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow m^2-(2-m)+2(1-m)=0 \Rightarrow m^2-m=0 \Rightarrow m=0 \text{ o } m=1.$$

Luego, el sistema puede tener solución cuando $m = 0$ o $m = 1$.

- Si $m = 0$, el sistema es $\begin{cases} y=2\\ x=0\\ x+y=2\end{cases}$. Su solución, inmediata, es $x = 0$; y = 2.
- Si $m = 1$, el sistema es $\begin{cases} x+y=2\\ x+y=1\\ x+y=2\end{cases}$. Evidentemente es incompatible: sus ecuaciones son contradictorias.

Por tanto, el sistema sólo es compatible si $m = 0$.

Problemas propuestos

Clasificación y resolución de sistemas por métodos elementales

1. Resuelve utilizando el método de de reducción de Gauss–Jordan, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

2. Resuelve utilizando el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$

3. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

4. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ 2x+my+4z=3 \end{cases}$

5. Aplicando la regla de Cramer halla la solución general, en función del parámetro *m*, del sistema $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases}$.

6. Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas. Cuando exista, da su solución.

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

7. Para qué valor de *m* tendrá solución el sistema:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ mx-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=m \end{cases}$

Sistemas con un parámetro. Aplicación del teorema de Rouché

8. Estudia, en función del valor de *m*, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+my+3z=7 \end{cases}$.
Resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones, y da un par de esas soluciones.

9. Resuelve el sistema $\begin{cases} kx+y+(k+1)z=0 \\ ky+(k+1)z=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$ para los valores de *k* que lo hagan compatible.

10. Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema $\begin{cases} kx+2z=0 \\ ky-z=k \\ x+3y+z=5 \end{cases}$.
Resuélvelo para el valor de *k* = 2.

11. a) Discute en función de los valores de *a* el sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+a)y-az=2a \\ x+ay+(1+a)z=1 \end{cases}$.
b) Si es el posible, resuélvelo cuando *a* = –1 y cuando *a* = 1.

12. Clasifica según los valores de *p* el sistema $\begin{cases} (1-p)x=1-p^2 \\ y=3 \\ x+y+pz=3 \end{cases}$. Resuélvelo cuando sea posible.

13. Estudia la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ kx+(k+3)y+3z=3 \end{cases}$, según los valores del parámetro *k*.
Si es posible, resuélvelo para *k* = –3.

14. (Propuesto en Selectividad 1999, Madrid)
Estudia el siguiente sistema lineal, según los diferentes valores del parámetro real *a*. En los casos en que sea compatible, resuélvelo.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

15. (Propuesto en Selectividad 2011, UNED)

Resuelve, dependiendo del valor de λ, el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x + 2y + 3z = 0 \\ x - \lambda y - z = 0 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$.

16. (Propuesto en Selectividad 1999, Andalucía)

a) Sabiendo que los vectores $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, prueba que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$ es compatible determinado si, y sólo sí, se verifica que: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$.

b) Determina para qué valor, o valores, del parámetro *a* tiene solución única el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - 3y = a \\ 5x + ay = -13 \end{cases}.$$

Halla la solución para cada valor de *a* encontrado.

17. (Propuesto en Selectividad 2001, La Rioja)
Estudia, según los valores de *m*, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + my + 3z = 3 \\ y - 6z = 0 \\ 3y - z = 2 \end{cases}.$$

Sistemas con dos parámetros

18. Clasifica, según los valores de los parámetros *a* y *b*, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (a+1)y + b\,z = a \\ a\,y + b\,z = a + b \\ x + 2y + z = b \end{cases}.$$

19. (Propuesto en Selectividad 1998, Cantabria)

Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de *a* y *b*: $\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + ay + bz = 1 \\ x + y + abz = b \end{cases}$.

20. (Propuesto en Selectividad 1998, La Rioja)
Discute, en función de los valores de *a* y *b*, y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+y+bz=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$.

21. Halla los valores de *a* y *b* para que el siguiente sistema sea compatible: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+3y=b \\ x+2y=a \\ x+4y=2a \end{cases}$.

Sistemas homogéneos

22. Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$.
a) Halla sus soluciones.
b) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo homogéneo y tenga solución única.
c) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo compatible indeterminado.

23. Discute y resuelve, en función de los valores de *k*, el sistema
$$\begin{cases} kx+(1-k)y+(2-k)z=0 \\ x+y+z=0 \\ kx+y+kz=0 \end{cases}.$$

24. Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema: $\begin{cases} (1+k)x-2y+4z=0 \\ x-(1-k)y+z=0 \\ x+ky+z=0 \end{cases}$.
Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

25. Discute, según los valores del parámetro *a*, el sistema $\begin{cases} x+2z=0 \\ x-3y+az=0 \\ ax+z=0 \end{cases}$.
Resuélvelo en los casos en que sea compatible.

26. (Propuesto en Selectividad 1998, Madrid)
Se considera el sistema de ecuaciones en las incógnitas *x*, *y*, *z*, *t*: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+2z+t=0 \\ 2x+2\lambda y-t=0 \end{cases}$.
a) Encuentra los valores de λ para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2.
b) Resuelve el sistema anterior para λ = 0.

Problemas con enunciado

27. En un laboratorio se dispone de frascos con distinta capacidad y soluciones salinas de concentraciones diferentes. Frascos de 50 cl (centilitros), con una solución salina al 10 %; frascos de 50 cl, con solución salina al 20 %; y frascos de 100 cl, con solución salina al 50 %. Si se desea obtener 12 litros de solución salina al 30 %, ¿cuántos frascos completos de cada tipo hay que emplear? Si hay varias posibilidades, concreta un par de ellas.

28. Con los datos del problema anterior. Si se sabe que se emplearon en total 22 frascos, ¿es posible determinar cuántos se emplearon de cada tipo? Si es posible, da una de las soluciones.

29. Con los datos del problema **27**. Si se sabe que se emplearon en total 17 frascos, y que se utilizaron el doble de frascos de la solución al 20 % que de la solución al 50 %, ¿es posible determinar cuántos frascos se emplearon de cada tipo?

30. Encuentra la ecuación de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica pasa por los puntos (1, 2), (2, 1) y (3, 4).

31. La circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, pasa por los puntos (6, 2), (4, 6) y (–3, –1). Halla su centro y su radio.

32. Se desea preparar una dieta partiendo de tres alimentos básicos, [1], [2] y [3]. La dieta debe incluir exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades de cada ingrediente por cada paquete de alimentos se indica en la tabla adjunta. ¿Cuántos paquetes de cada alimento deben emplearse para conseguir la dieta requerida?

	Unidades por paquete		
Alimento	[1]	[2]	[3]
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

33. Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

34. Una persona dispone de 21000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad media de esos activos es de un 5, 6 y 10 %, respectivamente. El inversor quiere invertir en acciones el doble que en bonos, y conseguir una rentabilidad media del 7 %. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos bienes?

35. (Propuesto en PAU 2016, Asturias)
Considere un número de tres cifras cumpliendo que la suma de su número de decenas y su número de unidades es 5, y si al número original le restamos el número escrito con los dígitos en orden contrario, se obtiene 792.
a) Escriba el sistema de ecuaciones lineales.
b) Determine la matriz del sistema y la matriz ampliada.
c) Obtenga los posibles números en las condiciones dadas.

36. (Propuesto en PAU 2017, País Vasco)
Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80 % y un tercer grupo abona el 50 %. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

37. (Propuesto en EvAU 2018, Madrid)
Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.
En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

38. (Propuesto en PAU 2014, País Vasco)
Un comercio ha adquirido una partida de armarios y mesas. Los armarios han costado 649 € cada uno de ellos y las mesas 132 € cada una. El responsable del comercio no recuerda si el precio total ha sido 2716 o 2761 €.
a) ¿Cuánto ha pagado exactamente? Razona la respuesta.
b) ¿Cuántos armarios y mesas ha comprado exactamente?

Soluciones

1. a) $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$.

2. a) $\begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}$. b) Incompatible (SI).

3. a) Si m = 10, $\begin{cases} x=3t \\ y=2-4t \\ z=t \end{cases}$; si $m \neq 10$, $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$. b) Si m = –4, $\begin{cases} x=-2/3-t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases}$; si $m \neq 4$, SI.

4. a) Si m = 1, incompatible. Si $m \neq 1$: $x=\dfrac{-m-1}{m-1}$; $y=\dfrac{-2}{m-1}$; $z=\dfrac{2m}{m-1}$.

b) Si m = 0, incompatible. Si $m \neq 0$: $x=\dfrac{-3m+2}{m}$; $y=\dfrac{1}{m}$; $z=\dfrac{2m-1}{m}$.

5. $x=\dfrac{1+m}{1-m}$; $y=\dfrac{2}{1-m}$; $z=\dfrac{-2m}{1-m}$.

6. a) x = 2; y = 3. b) Incompatible.

7. a) $m=2$. b) m = 7.

8. Si $m \neq 4$, SCD. Si m = 4, $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$.

9. Siempre compatible: $x=\dfrac{1-k^2}{k^2+1}$; $y=\dfrac{-k^2-k}{k^2+1}$; $z=\dfrac{k^2}{k^2+1}$.

10. Si $k \neq 0, -1$, SCD. Si k = 0, SCI. Si k = –1, SI. Para k = 2: x = –4/3; y = 5/3; z = 4/3.

11. a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, SCD. Si a = 0, incompatible. Si a = 1, compatible indeterminado.

b) Para $a = -1$, $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -5/2 \end{cases}$. Para a = 1, $\begin{cases} x = -5t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

12. Si $p \neq 0$ y 1, SCD: $x = 1 + p$; y = 3; $z = \dfrac{-1-p}{p}$. Si p = 1: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$. Si p = 0, incompatible.

13. Si k = 3, SI. Si $k \neq 3$, SCI. Para k = –3: $x = t; y = 1 - t; z = 1 + t$.

14. Si a = 0, SCI. Si $a \neq 0$, SI. Para a = 0: $x = t; y = t; z = t$.

15. Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1$, SCD. Si $\lambda \neq \pm 1$: $x = \dfrac{3\lambda^2}{(3\lambda + 3)(\lambda - 1)}$; $y = \dfrac{\lambda}{(\lambda - 1)}$; $z = \dfrac{\lambda(-3\lambda^2 - 2)}{(3\lambda + 3)(\lambda - 1)}$.

Si $\lambda = \pm 1$, incompatible.

16. b) Para a = –3: x = –5; y = –4. Para a = –3/2: x = –7/2; y = –3.

17. Si $m \neq \dfrac{29}{6}$, incompatible. Si $m = \dfrac{29}{6}$: $x = \dfrac{-13}{17}$; $y = \dfrac{12}{17}$; $z = \dfrac{2}{17}$.

18. Si $a \neq b$ y $a \neq 1$, SCD. Si $a = b$ = 0 o 1, SCI. Si $a = b \neq 0$ y 1, incompatible.

19. Si $b \neq 0$ y $a \neq 0$ y –2, SCD. Si a = 1 y b = 1, SCI. En los demás casos, incompatible.

20. Si $a \neq b$ y $a \neq 1$, SCD. Si a = 1 y $b \neq 1$, SCI, con un grado de libertad. Si a = 1 y b = 1, SCI, con dos grados de libertad. Si $a = b$ y ambos distintos de 1, incompatible.

Si a = 1 y $b \neq 1$: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \quad t \\ z = 0 \end{cases}$. Si a = 1 y b = 1: $\begin{cases} x = 1 - t - h \\ y = \quad t \\ z = \qquad h \end{cases}$.

Si $a \neq b$ y $a \neq 1$: $x = \dfrac{a^3 - 2a - ab + b + 1}{(a - b)(a - 1)}$; $y = \dfrac{1 - a}{(a - b)}$; $z = \dfrac{1 - a}{a - b}$.

21. a = 2 y b = 3.

22. a) $x = t; y = -2t; z = t$. b) x = 0; y = 0; z = 0. c) $y + 2z = 0$.

23. $k \neq 1$, SCD: $x = y = z$ = 0. k = 1: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. **24**. $k \neq 3$: x = 0, y = 0, z = 0. k = 3: $\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

25. Si $a \neq$ 1/2, SCD. Si a = 1/2: $x = 4t; y = t; z = -2t$.

26. a) λ = 3/2. b) $x = t/2; y = 0; z = t/2$.

27. $\begin{cases} x = 72 - 2\lambda - 10\mu \\ y = \quad \lambda \\ z = \qquad \mu \end{cases}$. $\begin{cases} x = 32 \\ y = 10 \\ z = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 6 \end{cases}$. **28**. Si t = 4 se obtiene: x = 4, y = 16, z = 4.

29. 2 frascos de la solución al 10%; 10, de la solución al 20%; 5, de la solución al 50%.

30. $y = 2x^2 - 7x + 7$. **31**. Centro, (1, 2); su radio vale 5.

32. 8 paquetes del [1], 2 paquetes del [2] y 4 paquetes del [3].

33. Un café cuesta 1,50 €; un refresco, 1,80 €; un dulce, 1,20 €.

34. 3000 € en bonos; 12000 € en fondos; 6000 € en acciones.

35. c) 850; 941. **36**. 14; 6; 40.

37. 6; 6; 3. **38**. a) 2761. b) 1 y 16.